Jochen Weber

Aufgaben zu Wachstums- und Zerfallsprozesse

1.0 Um die Ausbreitung von Borkenkäfern in bayerischen Wäldern zu erforschen, wird der Befall eines ausgewählten Baumes über den Zeitraum von 12 Monaten untersucht. Die Anzahl der in diesem Baum befindlichen Borkenkäfer kann näherungsweise durch den Term $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot (t^2 - 12t)}$ mit $t, \lambda \in IR$ und $t \geq 0$, $\lambda < 0$ beschrieben werden, wobei N_0 die Anzahl der Borkenkäfer zu Beginn des Beobachtungszeitraums und t die Zeit in Monaten ab Beobachtungsbeginn ist.
Es ist bekannt, dass sich die Anzahl der Borkenkäfer nach dem ersten Monat verdreifacht hat und nach einem weiteren Monat 133 Borkenkäfer gezählt wurden.
Alle Ergebnisse sind auf zwei Nachkommastellen zu runden, sofern nicht anders gefordert. Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden. (Abitur 2015 AII)

1.1 Bestimmen Sie λ und N_0. Runden Sie dabei N_0 auf eine ganze Zahl.

Für die folgende Teilaufgabe gilt: $\lambda = -0{,}10$ und $N_0 = 18$.

1.2 Ab einem Befall von 540 Borkenkäfern gilt der Baum als dauerhaft geschädigt. Berechnen Sie den Zeitpunkt t_0, zu dem diese Anzahl erstmalig erreicht wird.

2.0 Ein Studio für Ernährungsberatung erstellt nach dem Motto „Abnehmen braucht Zeit“ für einen Kunden eine persönliche Gewichtskurve für die geplante Diät.
Die Funktion G mit $G(t) = 20e^{-0{,}2t} + 70$ mit $t \in IR$ und $t \geq 0$ gibt näherungsweise das Gewicht in kg nach t Monaten an. Auf die Angabe von Einheiten bei den Berechnungen kann verzichtet werden.

2.1 Bestimmen Sie das Gewicht des Kunden zu Beginn der Diät und das Idealgewicht G_{ideal}, das der Kunde nach sehr langer Anwendung der Diät erreichen soll.

2.2 Ermitteln Sie, nach welcher Dauer t_1 der Diät der Kunde nach diesem Plan 75 % der angestrebten Gewichtsreduzierung erreichen wird.

3.0 Im Jahre 1975 gab es auf der Erde 4,033 Milliarden Menschen. Man rechnet mit einer Verdoppelungszeit der Erdbevölkerung von etwa 40 Jahren.

3.1 Nehmen Sie exponentielles Wachstum an und stellen Sie die Wachstumsfunktion ab 1975 auf.
Bestimmen Sie damit die Bevölkerungszahlen der Jahre 1990 und 2000.

3.2 In Europa beträgt die jährliche Wachstumsrate 0,35% und in Afrika 2,94%. Vergleichen Sie die Verdoppelungszeiten.

4.0 Eine Bakterienkultur von 3800 Individuen wurde um 9.00 Uhr sich selbst überlassen. Um 13.00 Uhr umfasste sie bereits 31500 Bakterien.

4.1 Nehmen Sie exponentielles Wachstum an und stellen Sie die Wachstumsfunktion Zeit → Bakterienzahl auf.

4.2 Berechnen Sie den Bestand um 11.00 Uhr, 14.30 Uhr und 16.00 Uhr.

4.3 Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem 12000 Bakterien vorhanden sind.

4.4 Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem sich die ursprüngliche Bakterienzahl verdoppelt hat.

5.0 Ein Körper mit einer Temperatur von 300°C wird zum Abkühlen in einen Raum mit der gleich bleibenden Temperatur von 0°C gebracht.
Innerhalb einer Stunde sinkt die Temperatur jeweils auf 40% ihres Wertes zu Beginn dieser Stunde. Mit f(t) wird die Temperatur des Körpers nach t Stunden bezeichnet.

5.1 Vervollständigen Sie die folgende Wertetabelle.

t in h	0	1	2	3	4	5
f(t) in °C						

5.2 Bestimmen Sie den Funktionsterm der Funktion f(t) und zeichnen Sie den Graphen der Funktion f(t).

5.3 Ermitteln Sie, wann die Temperatur auf 100°C abgesunken ist.

6.0 Nimmt man ein Glas mit einer Flüssigkeit aus dem Kühlschrank, so erwärmt sich die Flüssigkeit. Der Erwärmungsvorgang wird beschrieben durch
$f(t) = 20 - 15e^{-0{,}1t}$ $(t \geq 0 \text{ in Minuten, } f(t) \text{ in } °C)$.

6.1 Begründen Sie, dass sich die Temperatur der Flüssigkeit langfristig dem Wert 20°C nähert.

6.2 Berechnen Sie, auf welche Temperatur sich die Flüssigkeit innerhalb der ersten fünf Minuten erwärmt.

6.3 Ermitteln Sie, nach wie viel Minuten die Temperatur 17°C beträgt.

7.0 Eine Mäusepopulation in einem Keller wächst exponentiell an. Bei Beobachtungsbeginn sind acht Mäuse vorhanden, nach 10 Wochen sind es bereits 26 Tiere. Die Knappheit an Nahrung erlaubt es maximal 50 Mäusen dauerhaft im Keller zu überleben.

7.1 Begründen Sie, dass die Anzahl der Mäuse im Keller durch die Wachstumsfunktion $N(t) = 50 - 42 \cdot e^{-0{,}056 \cdot t}$ (t in Wochen) beschrieben werden kann.

7.2 Ermitteln Sie, wie viele Mäuse nach fünf Wochen im Keller leben. ◯

7.3 Bestimmen Sie, nach wie vielen Wochen der Bestand auf 40 Mäuse angewachsen ist. ◯

Lösungen

1.1

$$N(1)=3\cdot N_0 \;\Rightarrow N_0\cdot e^{\lambda(-11)}=3\cdot N_0 \;\Rightarrow e^{\lambda(-11)}=3 \;\Rightarrow -11\lambda=\ln 3$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{\ln 3}{-11}\approx -0{,}10$$

$$N(2)=133 \;\Rightarrow N_0\cdot e^{-0{,}10\cdot(-20)}=133 \;\Rightarrow N_0=\frac{133}{e^2}\approx 18$$

1.2

$$18e^{-0{,}1(t^2-12t)}\geq 540 \;\Rightarrow e^{-0{,}1(t^2-12t)}\geq 30 \;\Rightarrow -0{,}1(t^2-12t)\geq \ln(30)$$

$$\Rightarrow t^2-12t\leq \frac{\ln(30)}{-0{,}1} \;\Rightarrow t^2-12t+34{,}01\leq 0$$

$$\Rightarrow t^2-12t+34{,}01=0 \;\Rightarrow t_1\approx 7{,}41 \quad t_2\approx 4{,}59$$

Skizze von $(t^2-12t+34{,}01)$:

$\Rightarrow$ erstmaliger Zeitpunkt $t_0\approx 4{,}59$

2.1

$$G(0)=20\cdot e^{-0{,}2\cdot 0}+70=20+70=90$$

Zu Beginn der Diät hat der Kunde 90 kg.

$$t\to\infty \qquad 20\cdot\underbrace{e^{-0{,}2t}}_{\to 0_+}+70\to 70$$

Nach sehr langer Anwendung der Diät soll der Kunde
ein Idealgewicht von 70 kg erreichen.

2.2

Angestrebte Gewichtsreduzierung: 20 kg $\qquad$ 75% von 20 kg = 15 kg

$$20\cdot e^{-0{,}2\cdot t_1}+70=75 \quad\Rightarrow e^{-0{,}2\cdot t_1}=0{,}25 \;\Rightarrow t_1=\frac{\ln(0{,}25)}{-0{,}2}\approx 6{,}93$$

Nach knapp 7 Monaten sind 75 % der angestrebten Gewichtsreduzierung erreicht.

3.1

$f(t)=a\cdot b^t$

$f(0)=4{,}033\cdot 10^9 \quad \Rightarrow a=4{,}033\cdot 10^9$

$f(40)=2\cdot 4{,}033\cdot 10^9=8{,}066\cdot 10^9 \quad \Rightarrow 8{,}066\cdot 10^9=4{,}033\cdot 10^9\cdot b^{40}$

$\Rightarrow b^{40}=2 \quad \Rightarrow b=\sqrt[40]{2}\approx 1{,}01748$

$\Rightarrow f(t)=4{,}033\cdot 10^9\cdot 1{,}01748^t$

Bevölkerungszahl 1990: $f(15)\approx 5{,}23\cdot 10^9$

Bevölkerungszahl 2000: $f(25)\approx 6{,}22\cdot 10^9$

3.2

Europa: $f(t)=a\cdot 1{,}0035^t \quad \Rightarrow 2a=a\cdot 1{,}0035^t$

$\Rightarrow 1{,}0035^t=2\Rightarrow t_E=\frac{\lg 2}{\lg 1{,}0035}\approx 198$ Jahre

Afrika: $f(t)=a\cdot 1{,}0294^t \quad \Rightarrow 2a=a\cdot 1{,}0294^t$

$\Rightarrow 1{,}0294^t=2\Rightarrow t_A=\frac{\lg 2}{\lg 1{,}0294}\approx 24$ Jahre

$\Rightarrow t_E\approx 8{,}25\cdot t_A$

4.1

$f(t)=a\cdot b^t$

$f(0)=3800 \quad \Rightarrow a=3800$

$f(4)=31500 \quad \Rightarrow 31500=3800\cdot b^4 \quad \Rightarrow b^4=8\frac{11}{38} \quad \Rightarrow b=\sqrt[4]{8\frac{11}{38}}\approx 1{,}6968$

$\Rightarrow f(t)=3800\cdot 1{,}6968^t$

4.2 $f(2)\approx 10941 \quad f(5{,}5)\approx 69623 \quad f(7)\approx 153886$

4.3

$12000=3800\cdot 1{,}6968^t \quad \Rightarrow 1{,}6968^t=3\frac{3}{19}$

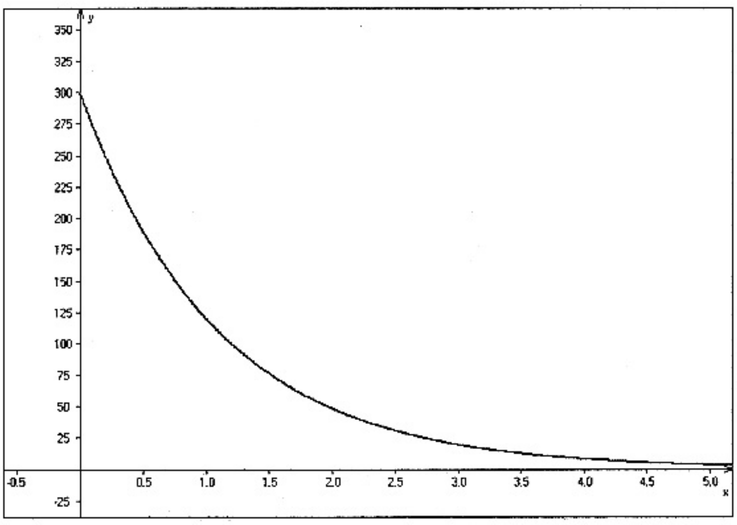
$\Rightarrow t=\frac{\lg(3\frac{3}{19})}{\lg 1{,}6968}\approx 2{,}17h \Rightarrow 11.28$ Uhr

4.4 1,31h $\Rightarrow$ 1 h 19 min $\Rightarrow$ der Anfangsbestand hat sich um ca. 10.19 Uhr verdoppelt

5.1

t in h	0	1	2	3	4	5
f(t) in °C	300	120	48	19,2	7,68	3,072

5.2 $f(t)=300\cdot 0,4^t$



5.3 $100=300\cdot 0,4^t \quad \Rightarrow 0,4^t=\frac{1}{3} \quad \Rightarrow t=\frac{\lg(\frac{1}{3})}{\lg 0,4}\approx 1,199\text{h} \ (1\text{h}\,12\,\text{min})$

6.1

$t\to\infty \qquad 20-15\cdot\underbrace{e^{-0,1\cdot t}}_{\to 0^+}\to 20$

Langfristig nähert sich die Temperatur der Flüssigkeit 20°C.

6.2 $f(5)=20-15\cdot e^{-0,1\cdot 5}\approx 10,90\ ^\circ\text{C}$

6.3

$17=20-15\cdot e^{-0,1\cdot t} \quad \Rightarrow -15\cdot e^{-0,1\cdot t}=-3 \quad \Rightarrow e^{-0,1\cdot t}=0,2$

$\Rightarrow -0,1t=\ln(0,2) \quad \Rightarrow t=\frac{\ln(0,2)}{-0,1}\approx 16,09\,\text{Minuten}$

7.1 $N(0)=50-42\cdot e^0=8 \qquad t\to\infty \quad 50-42\cdot\underbrace{e^{-0,056\cdot t}}_{\to 0^+}\to 50$

7.2

$N(5)=50-42\cdot e^{-0,056\cdot 5}\approx 18,26$

$\Rightarrow$ Nach fünf Wochen leben etwa 18 Mäuse im Keller.

7.3

$$40 = 50 - 42 \cdot e^{-0{,}056 \cdot t} \quad \Rightarrow -42 \cdot e^{-0{,}056 \cdot t} = -10 \quad \Rightarrow e^{-0{,}056 \cdot t} = \frac{10}{42}$$

$$\Rightarrow -0{,}056t = \ln\left(\frac{10}{42}\right) \quad \Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{10}{42}\right)}{-0{,}056} \approx 25{,}63$$

Nach etwa 26 Tagen ist der Bestand der Mäuse auf 40 angewachsen.